⑥ $\begin{cases} 5x_1+6x_2-2x_3=12 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=9 \\ 4x_1-3x_2+2x_3=-15 \end{cases}$

Решение: а) Решим систему методом Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$

Вычислим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot5\cdot2+6(-3)\cdot4+(-2)\cdot2(-3)-4\cdot5(-2)-(-3)(-3)\cdot5-2\cdot2\cdot6 =$$

$$= 50-72+12+40-45-24=-39$$

Найдём определители Δx_1, Δx_2, Δx_3:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 12 & 6 & -2 \\ 9 & 5 & -3 \\ -15 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 12\cdot5\cdot2+6(-3)(-15)+(-2)\cdot9(-3)-(-15)\cdot5(-2)-(-3)(-3)\cdot12-$$

$$-2\cdot9\cdot6= 120+270+54-150-108-108=78$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 5 & 12 & -2 \\ 2 & 9 & -3 \\ 4 & -15 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot9\cdot2+12(-3)\cdot4+(-2)\cdot2(-15)-4\cdot9(-2)-(-15)(-3)\cdot5-$$

$$-2\cdot2\cdot12 = 90-144+60+72-225-48=-195$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 12 \\ 2 & 5 & 9 \\ 4 & -3 & -15 \end{vmatrix} = 5\cdot5(-15)+6\cdot9\cdot4+12\cdot2(-3)-4\cdot5\cdot12-(-3)\cdot9\cdot5-(-15)\cdot2\cdot6=$$

$$=-375+216-72-240+135+180=-156$$

Получаем решение:

$x_1 = \frac{78}{-39} = -2$; $x_2 = \frac{-195}{-39} = 5$; $x_3 = \frac{-156}{-39} = 4$

б) Решим систему матричным методом:

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} \quad AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B \ ; \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T$$

$|A| = \Delta = -39$ (из пункта а)) $\Delta = -39 \neq 0$ найдём обратную матрицу

Вычислим алгебраические дополнения:

$$a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2-(-3)(-3) = 1$$

$$a_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(2\cdot 2-4(-3)) = -16$$

$$a_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3)-4\cdot 5 = -26$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -(6\cdot 2-(-3)(-2)) = -6$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2-4(-2) = 18$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(5(-3)-4\cdot 6) = 39$$

$$a_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 6(-3)-5(-2) = -8$$

$$a_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -(5(-3)-2(-2)) = 11$$

$$a_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot 5-2\cdot 6 = 13$$

Матрица алгебраических дополнений

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -16 & -26 \\ -6 & 18 & 39 \\ -8 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 \\ -16 & 18 & 11 \\ -26 & 39 & 13 \end{pmatrix}$$

Тогда обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{-39}\begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 \\ -16 & 18 & 11 \\ -26 & 39 & 13 \end{pmatrix}$$

Тогда решение будет иметь вид:

$$X = -\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 \\ -16 & 18 & 11 \\ -26 & 39 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 1\cdot 12-6\cdot 9-8(-15) \\ -16\cdot 12+18\cdot 9-15\cdot 11 \\ -26\cdot 12+39\cdot 9-15\cdot 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 12-54+120 \\ -192+162-165 \\ -312+351-195 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{39}\begin{pmatrix} 78 \\ -195 \\ -156 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

в) Решим систему методом Гаусса:

Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 6 & -2 & 12 \\ 2 & 5 & -3 & 9 \\ 4 & -3 & 2 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}(-2)+\mathrm{III}]{\mathrm{II}(-2)+\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 2 & 5 & -3 & 9 \\ 0 & -13 & 8 & -33 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}(-2)+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & 13 & -11 & 21 \\ 0 & -13 & 8 & -33 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 4 & -6 \\ 0 & 13 & -11 & 21 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \end{array}\right) \quad r(A) = r(\bar{A}) = n = 3 \Rightarrow$$ система имеет единственное решение

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -6 \\ 13x_2 - 11x_3 = 21 \\ -3x_3 = -12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = -\frac{12}{-3} = 4 \\ 13x_2 = 21 + 11 \cdot 4 = 65 \\ x_1 = -6 + 4x_2 - 4 \cdot 4 = 4x_2 - 22 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 4 \\ x_2 = 5 \\ x_1 = 4 \cdot 5 - 22 = -2 \end{cases}$$

получаем решение:

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -2$; $x_2 = 5$; $x_3 = 4$